論理学入門

東京工業大学　哲学研究会

Ver.1.01（2020 年 5 月）

目 次

第1章　命題論理学

——論理は世界を満たす。世界の限界は論理の限界でもある。

ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』5.61

1.1　はじめに

1.1.1　本冊子の成り立ち

このレジュメも，哲学研がこの先長続きすれば，よりよいものに刷新されてゆくはずです。

本レジュメは，哲学研究会において論理学の勉強会を行う際に，勉強会を円滑に進めるために作られたレジュメです。この勉強会は 2018 年度の 9 月にはじめて行われることとなったため，レジュメ作成者としても作るのが早急になってしまいました。そのため，厳密な論証などは省略し，実践的なテクニックを重視したものとなっています。

なお，本冊子は主に野谷茂樹『論理学』，および 2017 年度東工大科学哲学 B の講義をもとに作られています。

以上のような点で，この「論理学入門」という冊子は，哲学研員が哲学書を読んだり，論理的な思考の支えとするための種を，彼らに与える役割を担っているにすぎません。そのため，将来的に分析哲学について詳しく勉強したい，と思っている方々にとっては，この冊子だけで論理学について理解したと考えるのは不十分だと考えてください。

1.1.2　自然言語と論理学

まず，論理学を学ぶ上で最低限意識しておくべきことがあります。それは，本冊子における論理学（哲学的論理学）が扱う対象は自然言語であるということです。これは,「本冊子で扱う論理学の対象は，自然言語とは完全に独立した『思想』である」と勘違いしている読者がいるかもしれない，という筆者の懸念から述べたものです。

この間違いは，本冊子で紹介する論理学を数理論理学と混同したことによる勘違いだと思われます。本冊子で紹介する論理学の対象はあくまで自然言語であり，数学ではありません。ましてや，言語的表現とは独立に存在する『思想』ではありません。

筆者は，このような考え方は完全に間違っている，と断言することはできません。しかし，今日における分析哲学が，哲学において重要となる概念の解明は，言語的表現手段の解明によってこそ可能になるはずだと考えている限り，先程のような考え方は，残念ながら時代遅れといわざるを得ません。というのも,「論理学が扱う対象は自然言語とは独立した『思想』である」と考えるのは，その「思想」が自然言語とは独立した存在であると考える点で，プラトン的なイデア論と何ら変わりないからです [1)]。

本冊子において扱う論理学はそのようなものではなく，あくまで自然言語における形式を抜き出すための道具として用意されたものにすぎない，と考えるのが妥当だと思われます。あくまで先にあるのは論理学ではなく，自然言語なのです。

1.2 命題論理の意味論

上記のような言語哲学における難しい論争は専門的な解説書に任せるとして，本題に入りましょう。第 1 章では，命題論理を扱います。

1.2.1 結合子の導入

本冊子で紹介する論理学のルーツが自然言語にあると言った以上，自然言語を記号化することが出来なくては，論理学の存在価値がありません。もちろん，私たちは日本人ですので，本冊子においては，日本語文を記号化することになります。

本冊子ではアイヌ語は扱いません。

一口に日本語といっても，平叙文や疑問文，命令文などがありますが，さしあたりここでは疑問文，命令文などは扱わないことにします。というのも，我々がさしあたり話題にしたいのは，その文の真偽だからです。そこで，以下のような原理を要請し，真偽が判定できる文のことを命題と呼ぶことにします。

原理 1 (2 値原理) 命題は，真または偽のいずれか一方をとる。

次に，命題を表す記号 $P, Q, \cdots$ を**命題記号**と呼びます。そして，命題記号を ϕ, ψ として，以下のように結合子を用意します。

結合子	使い方	意味（日本語）	意味（英語）
$\sim$	$\sim(\phi)$	ϕ でない。	not ϕ
$\wedge$	$(\phi) \wedge (\psi)$	ϕ かつ ψ	ϕ and ψ.
$\vee$	$(\phi) \vee (\psi)$	ϕ または ψ	ϕ or ψ.
$\to$	$(\phi) \to (\psi)$	ϕ ならば ψ である。	if ϕ, then ψ.
$\leftrightarrow$	$(\phi) \leftrightarrow (\psi)$	ϕ であるとき，そしてその時に限り，ψ である。	ψ, if and only if ϕ.

表 1.1: 本冊子で導入する結合子一覧

なお，結合子におけるカッコ () は，誤解が生じない限り，省略するのが普通です。例えば，P, Q を命題記号としたとき，$\sim((P) \wedge (Q))$ は，$\sim(P \wedge Q)$

と書きます。また，カッコ () がない否定の結合子 $\sim$ があるときは，その結合子は直後の命題記号のみと結合します。たとえば，$\sim P \wedge Q$ は $(\sim (P)) \wedge (Q)$ と同じです。

先ほどの $\sim (P \wedge Q)$ と混同しないように注意しましょう。

もちろん，以上の論理記号は日本語に対応する表現として導入された，ただの形式的な記号にすぎません。そこで，この結合子を導入することで，どのように論理が明晰化されるかを明らかにしておく必要があるでしょう。

そこで，ある 2 つの原子命題を用意し，その命題記号を P, Q とします。このとき，$\sim P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \to Q$，$P \leftrightarrow Q$ の真偽が，P, Q の真偽にどのように対応するか，考えてみましょう。

これを表にまとめたものが，以下の表 1.2 です。以後，こうした表を**真理表**あるいは**真理値表**といいます。

条件式 $P \to Q$ において，仮定 P が偽のとき $P \to Q$ が真となることは，次のように考えれば納得が付きます。条件式 $P \to Q$ は，「P が成り立つならば Q」と述べているだけであり，P が成り立たない場合については，何も語っていないのです。

P	Q	$\sim P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

表 1.2: 基本的な結合子の真理値表

もちろんここでも，記号文 P, Q が真または偽のいずれか一方をとりうるという原理（**2 値原理**）が採用されています。

なお，上記のように，真理値表においては,「真」を 1,「偽」を 0 として省略して書くのが普通です。

このようにみてみると，複合的な命題の真偽は，もとになる命題の真偽の「関数」とみることができます。そこで,「もとになる命題の真偽の関数」という意味を込めて，複合的な命題を**真理関数**と呼ぶことがあります。この用語は分析哲学の哲学書でしばしば出てくる用語です。

1.2.2 日本語文の記号化

以上で自然言語に対応する形式言語の取り扱いについては明らかになったものとして，日本語文の記号化の話題に戻りましょう。というのも，自然言語である日本語にはさまざまな言い回しがあるので，それらをどのように記号化するかについて，整理する必要がまだあるからです。

(1) 「でない」の文体上の変種

以下の文はすべて,「太郎は犯人である」を P とするとき，$\sim P$ と記号化されます。

太郎は犯人 { などということはない。 / ということはない。 }

(2) 「かつ」の文体上の変種

以下の文はすべて,「太郎は家にいる」を P,「花子は学校にいる」を Q とするとき，$P \wedge Q$ と記号化されます。

$$\text{太郎は家にいる,}\left\{\begin{array}{c}\text{加えて}\\ \text{そして}\\ \text{その上}\end{array}\right\}\text{花子は学校にいる。}$$

(3) 「または」の文体上の変種

以下の文はすべて,「太郎は家にいる」を P,「花子は学校にいる」を Q とするとき，$P \vee Q$ と記号化されます。

$$\text{太郎は家にいる,}\left\{\begin{array}{l}\text{あるいは}\\ \text{か}\\ \text{もしくは}\end{array}\right\}\text{花子は学校にいる。}$$

(4) 「ならば」の文体上の変種

以下の文はすべて,「雨が降る」を P,「遠足は中止である」を Q とするとき，$P \to Q$ と記号化されます。

$$\text{雨が降る}\left\{\begin{array}{c}\text{とき}\\ \text{場合}\\ \text{限り}\end{array}\right\}\text{，遠足は中止である。}$$

(5) 「ときに限り」の文体上の変種

以下の文はすべて,「雨が降る」を P,「遠足は中止である」を Q とするとき，$Q \to P$ と記号化されます。

(4) との違いに注意しよう。

$$\text{雨が降る}\left\{\begin{array}{l}\text{ときに限り}\\ \text{ときだけ}\\ \text{場合だけ}\\ \text{場合のみ}\end{array}\right\}\text{，遠足は中止である。}$$

(6) 「であるとき，そしてそのときに限り」の文体上の変種

以下の文はすべて,「雨が降る」を P,「遠足は中止である」を Q とするとき，$Q \leftrightarrow P$ と記号化されます。

$$\text{雨が降るのは，遠足は中止である}\left\{\begin{array}{l}\text{場合，そしてその場合のみである。}\\ \text{ちょうどそのときである。}\end{array}\right.$$

例題 1 次の図式のもとで，(i)〜(v) の日本語文を記号化してください。

P：太郎は英語を勉強する　Q：花子は英語を勉強する
R：太郎はテストに合格する　S：花子はテストに合格する
T：英語の勉強は楽しい　U：太郎はテストをすべて受ける

(i) 太郎と花子は英語を勉強するものの，彼らが 2 人ともテストに合格するということはない。
(ii) 英語の勉強が楽しいときに限り，太郎は英語を勉強するし，またテストに合格する。

【解答】
(i) $(P \wedge Q) \wedge \sim (R \wedge S)$
(ii) $P \wedge R \to T$

1.2.3 真理値分析と意味論的妥当性

真理値表を書けば，論理的な推論の正しさを判定することができます。ここで「正しい」というのは，その推論において，前提がすべて真であるとき，必ず結論も真である，ということです。厳密には下の定義のようになります。

要は，真理値表を書いた際に，前提がすべて 1(真) の行において，結論もすべて 1(真) になっていればよい，ということです。

定義 1 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ を前提とし，ψ を結論とする推論が**意味論的に妥当である**とは，真理表において，すべての前提 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ が真でありかつ結論が偽である行が存在しないことをいい，又そのときに限る。

例題 2 次の推論が意味論的に妥当であることを示してください。

$$P \vee Q, \sim P \quad \therefore\ Q$$

【解答】 真理値表は以下のようになります。

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

表より，前提がすべて真の行において結論も真であるため，この推論は意味論的に妥当であることがわかります。

トートロジーと矛盾

定義 2
(1) 原子式の真理値によらず常に真となる論理式を**トートロジー**という。
(2) 原子式の真理値によらず常に偽となる論理式を**矛盾**という。

例題 3 $(P \vee Q) \wedge \sim P \to Q$ がトートロジーであることを，真理値表を書いて示してください。

【解答】 真理値表は以下のようになります。

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$	$(P \vee Q) \wedge \sim P$	$(P \vee Q) \wedge \sim P \to Q$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

表より，原子命題 P, Q の真偽によらず $(P \vee Q) \wedge \sim P \to Q$ はすべて真であるため，この論理式はトートロジーです。

問題 1 排中律 $\sim P \vee P$，矛盾律 $\sim (P \wedge \sim P)$，ド・モルガン則 $\sim P \wedge \sim Q \ \leftrightarrow \ \sim (P \vee Q)$ がトートロジーであることを，真理値表を書いて示してください。

1.2.4 命題論理についての補足

論理記号の相互関係について

実は，以前に導入した 5 つの結合子は，すべて必要というわけではありません。たとえば，結合子 $\to$（ならば）は，わざわざ導入しなくても，2 つの結合子 $\sim$, $\vee$ の組み合わせで代用できます。

例題 4 $P \to Q$ と $\sim P \vee Q$ が同じ真理関数であることを，真理値分析により確認してください。

【解答】 真理値表は以下のようになります。

P	Q	$P \to Q$	$\sim P \vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

表から，$P \to Q$ と $\sim P \vee Q$ が同じ真理関数であることがわかります。

問題 2 2 つの結合子 $\sim$，$\to$ のみで，ほかの 3 つの結合子 $\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$ はすべて代用できます。このことを確認してください。（$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \leftrightarrow Q$ と同じ真理値表を持つ命題を，$P, Q, \sim, \to$ のみで作ってください。）

命題論理はすべての真理関数を扱うことが可能である

機械的な方法によって，真理値表からそれに該当する論理式を逆算することができます。

例題 5 以下の真理表によって与えられた真理関数を，$P, Q,$ 結合子を用いた論理式で表現してください。

P	Q	A
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

【解答】 P が真でかつ Q が偽のときのみ真で，それ以外はすべて偽の論理式は $P \wedge \sim Q$ です。また，P かつ Q が偽のときのみ真で，それ以外はすべて偽の論理式は $\sim P \wedge \sim Q$ です。以上から，これらを論理和で組み合わせたもの

$$(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$$

が答えになります。

このように考えると，今まで用意した結合子を用いれば，論理式はすべての真理関数を表現できることがわかります。

1.2.5 演習問題

演習問題 1 次の図式のもとで，以下の日本語文を記号化してください。

V：桃太郎は鬼退治に行く　W：鬼が島に鬼がいる　X：サルが仲間になる
Y：犬が仲間になる　Z：キジが仲間になる

(i) 桃太郎が鬼退治にいくのは，犬もサルも仲間にならないなどということがない場合だけだ。
(ii) 犬か去るかキジの少なくともどれか一つが仲間にならないにもかかわらず，桃太郎は，鬼ヶ島に鬼がいる限り鬼退治に行く。
(iii) キジとサルがともに仲間になることがないならば，犬が仲間になってもならなくても桃太郎は鬼退治へは行かない。

演習問題 2 次の推論が意味論的に妥当であるか判定してください。

$$(P \land Q) \lor \sim (P \land Q),\ P \land \sim Q \to R,\ \sim P \land Q \to R, \qquad \therefore R$$

演習問題 3 命題記号 P, Q を以下のように設定します。

P ：たかし君は東工大生である。
Q ：たかし君は東工大で留年している。

このとき，現実の世界は $P \land Q$，$\sim P \land Q$，$P \land \sim Q$，$\sim P \land \sim Q$ の 4 つのうちいずれか 1 つのみが成立していると考えられます。

(i) $P \lor Q$ のとき，現実世界をとしてありうるものをすべて述べてください。
(ii) $P \lor \sim P$ のとき，現実世界をとしてありうるものをすべて述べてください。
(iii) 次の文章の意味を説明してください。

> 6.1 論理の命題はトートロジーである。
>
> 6.1.1 それゆえ論理の命題は何事も語らない。
>
> ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』

演習問題 4 次のような文章があります。

> 6 真理関数の一般形式はこうである。$[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$
>
> ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』

ここで，$\bar{p}$ はこの世に存在する要素命題すべてであり，$N(\bar{\xi})$ は $\bar{\xi}$ すべての否定を表します。たとえば，$N(P) \leftrightarrow \sim P$, $N(P,Q) \leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$ です。

(i) $N(P,Q)$ を真理値分析してください。
(ii) $N(\bar{\xi})$ によって 5 つの結合子がすべて表現できることを確認してください。

演習問題 5 以下の真理表によって与えられた真理関数を，$P, Q, R,$ 結合子を用いた論理式で表現してください。

P	Q	R	A
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

1.3 命題論理の構文論

1.2 節では，与えられた論理式や推論の妥当性を，真理値表を書くことによって確認する方法を学びました。このように，文の真偽（意味）という観点から論理学を構築するアプローチを**意味論**といいます。

一方で，本節では，このような意味論的な手法とは全く異なり，いくつかの推論規則を公理として定めることによって，論理的な演繹を行う手法を学びます。このように，記号の意味を考慮せず，記号相互の関係や規則のみを考察する仕方を**構文論**といいます。

幾何学の公理系と同じようなものを，命題論理においても導入すると考えればわかりやすいでしょう。

なお，鋭い読者の方はお気づきと思いますが，構文論と意味論が無矛盾であることは，本来証明すべきことです。しかし本冊子ではここまでは触れません [2)]。

1.3.1 推論規則の導入

いくつかの前提から結論を導出する規則を推論規則と言います。本冊子では，以下の 10 の推論規則を導入します。**すべて覚えてください。**

1. MP : Modus Ponens

前提 $P, P \to Q$ から，Q を導出してよい。

$$\frac{\begin{array}{r} P \to Q \\ P \end{array}}{Q}$$

2. MT : Modus Tollens

前提 $\sim Q, P \to Q$ から，$\sim P$ を導出してよい。

$$\frac{\begin{array}{r} P \to Q \\ \sim Q \end{array}}{\sim P}$$

3. DN : Double Negation

前提 $\sim\sim P$ から，P を導出してよい。
前提 P から，$\sim\sim P$ を導出してよい。

$$\frac{\sim\sim P}{P} \qquad \frac{P}{\sim\sim P}$$

4. R : Repetition

前提 P から，P を導出してよい。

$$\frac{P}{P}$$

5. Adj : Adjunction

前提 P, Q から，$P \wedge Q$ を導出してよい。
前提 P, Q から，$Q \wedge P$ を導出してよい。

$$\frac{\begin{array}{r} P \\ Q \end{array}}{P \wedge Q} \qquad \frac{\begin{array}{r} P \\ Q \end{array}}{Q \wedge P}$$

6. S : Simplification

前提 $P \wedge Q$ から，P を導出してよい。
前提 $P \wedge Q$ から，Q を導出してよい。

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

7. Add : Addition

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{P}{Q \vee P}$$

前提 P から，$P \vee Q$ を導出してよい。
前提 P から，$Q \vee P$ を導出してよい。

8. MTP : Modus Tollendo Ponens

$$\frac{\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim P \end{array}}{Q} \qquad \frac{\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim Q \end{array}}{P}$$

前提 $P \vee Q, \sim P$ から，Q を導出してよい。
前提 $P \vee Q, \sim Q$ から，P を導出してよい。

9. CB : Conditional-Biconditional

$$\frac{\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow P \end{array}}{P \leftrightarrow Q}$$

前提 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow P$ から，$P \leftrightarrow Q$ を導出してよい。

10. BC : Biconditional-Conditional

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$$

前提 $P \leftrightarrow Q$ から，$P \rightarrow Q$ を導出してよい。
前提 $P \leftrightarrow Q$ から，$Q \rightarrow P$ を導出してよい。

なお，以上で示した推論規則における P, Q は，P, Q が複合命題（たとえば $\sim S \wedge T \rightarrow U$ など）であっても適用できます。

1.3.2　演繹の 3 形式

本冊子では，演繹として下記のような 3 つの形式を採用します。

1. DD : 直接演繹 (Direct Derivation)

何も仮定せず，前提から結論を導出する演繹です。

2. CD : 間接演繹 (Conditional Derivation)

示したい条件文の前件を仮定して，後件を導出します。

3. ID : 背理法 (Indirect Derivation)

示したい結論の否定を仮定し，矛盾を導出します。

1.3.3 演繹の記述法

それでは，推論の演繹の記述法について，以下の例題を通して学習しましょう。

例題 6 次の推論の演繹を構成してください。

$$\sim P \to (R \to S),\ S \to P,\ \sim P \qquad \therefore \sim R$$

【解答】 直接演繹を用いた演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$\sim R$	
2		$\sim P \to (R \to S)$	Pr
3		$S \to P$	Pr
4		$\sim P$	Pr
5		$R \to S$	2,4 MP
6		$\sim S$	3,4 MT
7		$\sim R$	5,6 MT
		7, DD	

”Pr”は「前提」，”2,4 MP”は，2 行目と 4 行目に MP を採用したことを表しています。

上の解答について解説します。まず，1 行目に書いてある Show は，この行に書いてある論理式 (今回は $\sim R$) を今から示す，ということを示しています。その後の 2〜7 行にある箱は，その箱の内部が，Show で示した論理式の演繹であることを表しています。最後の「7, DD」は，箱の内部において，7 行目を根拠として直接演繹が完了していることを示しています。

なお，証明が完了した場合は，かならず先頭の Show の文字を消すようにしてください。これの意味は，いずれ明らかになるでしょう。

以上のことをまとめておきます。解答を書く際には，以下のことに注意してください。

箱入れ　Show で示した論理式の演繹の部分を，箱で囲ってください。

箱入れの正当化　演繹が終わったら，例題の「7, DD」のように，箱の一番下に，根拠となる行数と使った演繹の種類を記してください。

打ち消し　演繹が終わったことを示すため，演繹が終わった論理式は，左横の”Show”を消してください。

条件演繹，背理法も基本的に同じです。以下に例題を載せます。

例題 7 次の推論の演繹を構成してください。

$$P \to Q,\ Q \to R, \qquad P \to R$$

【解答】 条件演繹を用いた演繹は以下のようになります。

Ass CD は"Assumption for CD"の略で,「条件演繹のための仮定」を意味します。

1	~~Show~~	$P \to R$	
2		P	Ass CD
3		$P \to Q$	Pr
4		$Q \to R$	Pr
5		Q	2,3 MP
6		R	4,5 MP
		6, CD	

例題 8 次の推論の演繹を構成してください。

$$P \vee Q,\ \sim P \vee Q \qquad \therefore\ Q$$

【解答】 背理法を用いた演繹は以下のようになります。

Ass ID は"Assumption for ID"の略で,「背理法のための仮定」を意味します。

1	~~Show~~	Q	
2		$\sim Q$	Ass ID
3		$P \vee Q$	Pr
4		$\sim P \vee Q$	Pr
5		P	2,3 MTP
6		$\sim P$	2,4 MTP
		5,6, ID	

条件演繹及び背理法を用いる場合は，Ass CD/ID は，必ず Show Line の次の行に書くようにしてください。

問題が複雑になってくると，次のように箱入れが多重になってきます。

例題 9 次の推論の演繹を構成してください。

$$\sim P \to Q \qquad \therefore\ (R \to \sim Q) \to (R \to P)$$

【解答】 演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$(R \to \sim Q) \to (R \to P)$	
2		$R \to \sim Q$	Ass CD
3		$\sim P \to Q$	Pr
4	~~Show~~	$R \to P$	
5		R	Ass CD
6		$\sim Q$	2,5 MP
7		$\sim\sim P$	3,6 MT
8		P	7 DN
		8, CD	
		4, CD	

ここで注意すべきは以下の通りです。

- 箱入れされた式（5〜8 行目の式）は，以降の演繹で利用してはなりません。
- 4 行目の式は，Show Line が打ち消しされてはじめて，以降の演繹で利用できます。
- 箱入れの正当化において示される行番号は，その箱の内部にある番号しか用いてはなりません。

もちろん，これらの規則は論理的誤謬を防ぐためのものです。必ず守るようにしてください。

1.3.4　演繹の練習

それでは，演繹の練習に入ります。行き詰ってしまった場合のために，以下にヒントを載せます。

ヒント 1　条件文を演繹するときは CD，それ以外を演繹するときは ID を用います。

ヒント 2　ID を利用して行き詰ったとき，条件文 $\sim(\phi \to \psi)$ が利用可能ならば，CD を用いて $\phi \to \psi$ を示します。

ヒント 3　MP も MT も適用できない条件文 $\phi \to \psi$ があるときは，ϕ を示します。

例題 10　次の推論の演繹を構成してください。

$$\sim \phi \to \psi \qquad \therefore\ \phi \vee \psi$$

【解答】　演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$\phi \vee \psi$	
2		$\sim \phi \to \psi$	Pr
3		$\sim(\phi \vee \psi)$	Ass ID
4	~~Show~~	$\sim \phi$	
5		ϕ	Ass ID
6		$\phi \vee \psi$	5 Add
7		$\sim(\phi \vee \psi)$	3 R
		6,7 ID	
8		ψ	2,4 MP
9		$\phi \vee \psi$	8 Add
		3,9 ID	

上の推論は，11 番目の推論規則として，以後利用してよいものとします。

11. CDJ

$$\frac{\sim \phi \to \psi}{\phi \vee \psi}$$

前提 $\sim \phi \to \psi$ から，$\phi \vee \psi$ を導出してよい。

例題 11 演繹的推論によってド・モルガン則

$$\sim(P \vee Q) \ \leftrightarrow \ \sim P \wedge \sim Q$$

を示してください。

【解答】 演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$\sim(P \vee Q) \leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$	
2	~~Show~~	$\sim(P \vee Q) \rightarrow \sim P \wedge \sim Q$	
3		$\sim(P \vee Q)$	Ass CD
4	~~Show~~	$\sim P$	
5		P	Ass ID
6		$P \vee Q$	5 Add
7		$\sim(P \vee Q)$	3R
		6,7 ID	
8	~~Show~~	$\sim Q$	
9		Q	Ass ID
10		$P \vee Q$	9 Add
11		$\sim(P \vee Q)$	3R
		10,11 ID	
12		$\sim P \wedge \sim Q$	4,8 Adj
		12 CD	
13	~~Show~~	$\sim P \wedge \sim Q \rightarrow \sim(P \vee Q)$	
14		$\sim P \wedge \sim Q$	Ass CD
15	~~Show~~	$\sim(P \vee Q)$	
16		$P \vee Q$	Ass ID
17		$\sim P$	14 S
18		Q	16,17 MTP
19		$\sim Q$	14 S
		18,19 ID	
		15 CD	
20		$\sim(P \vee Q) \leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$	2,13 CB
		20 DD	

1.3.5 練習問題

演習問題 6 次の推論の演繹を構成してください。

1. $P \vee Q,\ P \to S,\ Q \leftrightarrow T \qquad \therefore\ S \vee T$
2. $\sim(P \wedge R) \to (S \to R) \qquad \therefore\ R \vee \sim S$
3. $(Q \wedge \sim T) \vee \sim(T \to Q) \qquad \therefore (P \to Q) \vee (T \vee R)$
4. $(P \leftrightarrow Q \wedge S) \vee (P \leftrightarrow R \wedge T) \qquad \therefore\ P \to Q \vee R$
5. $\sim(P \leftrightarrow Q),\ \sim(P \leftrightarrow R) \qquad \therefore\ Q \to R$

演習問題 7 次の推論の演繹を構成してください。

1. $(\sim S \to T) \to U,\ V \to T \qquad \therefore (\sim V \to T) \to U$
2. $\sim(P \wedge Q)\ \leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$

演習問題 8 次の推論の演繹を構成してください。

1. $(P \to Q) \to R,\ \sim R \qquad \therefore \sim Q$
2. $(R \to S) \to P,\ \sim S \to Q \qquad \therefore \sim P \to Q$
3. $(Q \to \sim\sim S) \to (\sim R \to \sim S) \qquad \therefore\ S \to R$
4. $(P \to Q) \to (T \to R),\ U \to \sim R,\ \sim(S \to P) \qquad \therefore\ U \to \sim T$
5. $(\sim Q \to S) \to P,\ \sim R \to Q,\ R \to S \qquad \therefore\ P$
6. $P \to (Q \to R),\ P \to (\sim Q \to R),\ \sim P \to (Q \to R),\ \sim P \to (\sim Q \to R) \qquad \therefore\ R$
7. $(P \to Q) \to \sim(Q \to P) \qquad \therefore P \to \sim Q$
8. $(P \to Q) \to (R \to S),\ (Q \to P) \to (R \to S) \qquad \therefore \sim S \to \sim R$

第2章　述語論理学

——現代の哲学の観察者が異口同音に言うことは，現代の哲学の中心的問題が言語の問題だということである。

飯田隆『言語哲学大全 I』

2.1　はじめに

2.1.1　伝統的な論理学

命題論理学の考え方自体は古代ギリシャ哲学から既にあったのに対して，述語論理学は 20 世紀のフレーゲに始まったものであり，その歴史は非常に短いです。そのもっとも大きな理由は，文は「主語と述語」の 2 つの「項」からなるという（アリストテレス以降の）古来からの考え方が長く根付いていたためと思われます。まずはこの考え方について最低限触れておく必要があるでしょう。

古代ギリシャ哲学にも，ストア派およびメガラ派という学派はすでに命題論理学を中心的に研究していたようですが，後々アリストテレスの論理学と共に体系化される際に，ほとんど削ぎ落とされてしまったようです [3)]。

伝統的な論理学は，次の 3 つの原則に基づいています。

> **伝統的論理学の 3 原則**
> (1) 文の基本形は「主語＋述語」である。
> (2) 文は肯定と否定という 2 つの質を持つ。
> (3) 文は「すべて」と「ある」という 2 つの量を持つ。

主語と述語，つまり「A は B である」という基本的な形に 2 つの量，質を加えることで文の論理を把握できるというのは，明快な理念であるように思われます。このような伝統的論理学の理念に対する問題点は後述するとして，まずは伝統的論理学の性格について，最低限述べておきましょう。

伝統的論理学の言い換え規則

前述のように，伝統的論理学では主語と述語の結びつきによって文を捉えるために，文を命題記号として捉え，それによって推論規則を築き上げる命題論理の考えはほとんど採用されていません。その代わり，主語と述語による形式的な言い換え規則というものが存在しました。

これも，やはりアリストテレスの影響が非常に強かったことの帰結のようです。

伝統的論理学の言い換え規則
(1) ある S は P である $\Longleftrightarrow$ ある P は S である
(2) すべての S は P ではない $\Longleftrightarrow$ すべての P は S ではない
(3) （すべての S は P である）ではない $\Longleftrightarrow$ ある S は P ではない
(3) （ある S は P である）ではない $\Longleftrightarrow$ すべての S は P ではない

アリストテレスの三段論法

伝統的な論理学のうちで最も画期的かつ有名な原則は，アリストテレスの三段論法でしょう。三段論法は，以下のような 4 つの格を持ちます。

第 1 格	第 2 格	第 3 格	第 4 格
M – P	P – M	M – P	P – M
S – M	S – M	M – S	M – S
S – P	S – P	S – P	S – P

ここで結論の主語となる S を**小名辞**といい，結論の述語となる P を**大名辞**といいます。また，結論の主語と述語を仲立ちする M を**中名辞**といいます。

このとき，1 つの格は 3 つの文からなっており，それぞれの文は必ずどちらかの質（肯定 or 否定），量（$\forall$ or $\exists$）を持っているはずです。それゆえ，1 つの格に対して $4^3 = 64$ 通りの三段論法が考えられることになり，すべての格を考えると $4^4 = 256$ 通りの三段論法があることになります。アリストテレスは，これら 256 通りのうち正しい形式の推論である 24 個を抜き出し，それを証明して見せました [4)]。

2.1.2 述語論理の導入

既に確認したように，伝統的な論理学における「A は B である」を軸とした考え方では，基本的に主語と述語はただ文章における順番が違うだけであり，項としては同じものと見なされますが，一方で，現代の言語哲学では逆に，主語と述語は本質的にまったく異なるものと考えられています。

フレーゲに始まる述語論理学では，主語を a，述語を $F(x)$ と書き，命題を $F(a)$ のようにあらわすことによって，主語と述語を厳密に区別します（数学の関数の形に似ています。）。但しカッコは特に必要がない限り，略すのが普通です。たとえば，

$$
\begin{aligned}
Fx &: x \text{ は人間である} \\
a &: \text{ソクラテス}
\end{aligned}
$$

とおけば，

$$Fa \quad : \quad \text{ソクラテスは人間である}$$

という命題が得られます。

上の説明をもう少し厳密に言いなおしてみましょう。ここで,「x は人間である」という文の一部分は，いくつかの空所を持つ部分は文と同じであり，その空所を名前で埋めれば文となる形式を記号で表現したものであり，**関数**または**命題関数**といいます。命題関数（今回なら「—— は人間である」）を作るには，完全な文（「ソクラテスは人間である」）のうち適切な一部（「ソクラテス」）をくりぬかなければなりません。このとき，命題関数の空所を埋める部分を**項**といいます。項のうち，命題関数における入力部分（くりぬかれたところ）を**変項**といい，入力部分である変項にあてはまって値となる部分を**定項**といいます。本冊子では変項を $x, y, \cdots$ で表します。

また，個体が満たす性質や関係を表す表現を**述語**といい，$Fx, Gxy, \cdots$ で表します。（お気づきの通り，今回はまさに述語が命題関数になっており，主語が項になっている例です。）また,「ソクラテス」や「x と y の息子」のように，名詞句を作る表現を**関数句**といいます。関数句のうち，入力部分を特に持たない関数句は，単純な固有名（ものに対する名前）を記号化したものですが，今回はこれが定項に対応するので，単に**定項（個体定項）**と言います。本冊子では定項を $a, b, \cdots$，定項以外の関数句を $Ax, Bxy, \cdots$ で表現します。

別に変項は必ずしも固有名を置き換える（$a \to x$）必要はなく，逆に述語 F を変項 Φ に置き換えても別に良いわけです（$Fa \to \Phi a$ のように）。この指摘は完全に正しいのですが，今回は述語が変項である場合は扱いません。

2.2 述語論理の意味論

では早速，述語論理の本題に入ります。まずは量化子（$\forall, \exists$）を導入します。量化子を導入することによって，従来の論理学の限界が浮き彫りになり，それと同時に，量化子がいかに強力な道具であるか，納得してもらえると思います。

2.2.1 量化子の導入

20 世紀に始まった述語論理学がめざましく発展した最も大きな理由は，フレーゲに始まる量化子（$\forall$, $\exists$）の導入にあります。

量化子の導入
(1) 「すべての x について Fx」を，$\forall x\ Fx$ と書きます。
(2) 「ある x が存在して Fx」を，$\exists x\ Fx$ と書きます。

なお，本冊子では，$\forall x\ Fx \land Gx$ における量化子 $\forall x$ は，前の Fx にのみかかっているものとみなします。
つまり，$\forall x\ Fx \land Gx$ は，$(\forall x\ Fx) \land (Gx)$ と同じです。$\forall x\ (Fx \land Gx)$ との違いに注意してください。

ここで ∀ を**全称量化子**といい，∃ を**存在量化子**と言います。また，全称量化子と存在量化子によって記号化される文を**全称文**，**存在文**といいます。

述語論理学における量化子の導入は，非常に画期的なものでした。その理由は以下の 3 点に要約されます。

1 点目に，量化子の導入によって，一般名詞と固有名詞の行き来が自由に表現できるようになったことです。伝統的な論理学では，原則は論理学の適用される名詞は一般名詞のみでした。例えば，伝統的な論理学が扱うのは「猫」一般の概念だったのであり,「タマちゃん」などの個物としての猫を扱うことは想定されていないのです。これに対して，述語論理では「すべての鳥は空を飛ぶ」を,「すべての x について，x が鳥ならば，x は空を飛ぶ」と言い換えることにより，一般名詞と固有名詞を自由に扱うことができます。

これは，アリストテレスの論理学において文の「量」が「すべて」と「ある」の 2 種類のみしか想定されていなかったことからも伺えます。

2 点目に,「太郎は花子を愛している」から，$F(xy)$:「x が y を愛している」という述語が作れるように，伝統的な論理学では全く扱うことが出来なかった n 項述語も（量化を込めて）扱うことができるという点です。たとえば,「太郎はだれかを愛している」といった場合には，$\exists x F(ax)$ で表現できます（a は太郎)。伝統的な論理学では，2 項述語は扱うことができません。

3 点目に「誰もが誰かを愛している」といった，多重量化を含む文章も扱うことができるということです。読者は,「誰もが，誰かを愛している」という文章と,「誰かが，誰もに愛されている」という文章は意味が全く違うことに気づくでしょうか？ この違いは，量化子を用いて，

$$\exists y\ \forall x\ F(xy), \quad \forall x\ \exists y\ F(xy)$$

と記号化してしまえば，すぐにわかります（あとは自分で考えてみてください)。多重量化を含む文は，アリストテレスの論理学を含め，これまでどの論理学もお手上げでしたので，これはやはり画期的です。

問題 3 $\exists y\ \forall x\ F(xy)$, $\forall x\ \exists y\ F(xy)$ の 2 つのそれぞれの場合について，$x \in \{x_1, x_2, x_3\}$，$y \in \{y_1, y_2, y_3\}$ としてすべて書き出すか図式化し，違いを確認してみてください。

命題論理の側の限界

似たような問題は，命題論理の方にもあります。たとえば，次の 2 つの命題を考えてみましょう。

P : すべての人間は幸福である

Q : すべての人間は幸福ではない

このとき，命題 P, Q 間では，矛盾律 $\sim(P \wedge Q)$ は成立しますが，排中律 $P \vee Q$ が成立しません。ここからただちに，命題論理では，Q を P の否定として扱うことができないことがわかります。

逆に，次の 2 つの命題を考えてみましょう。

$$
\begin{aligned}
P' &\ :\ \text{一部の人間は幸福である} \\
Q' &\ :\ \text{一部の人間は幸福ではない}
\end{aligned}
$$

このとき，命題 P', Q' 間では，排中律 $P' \vee Q'$ は成立しますが，矛盾律 $\sim (P' \wedge Q')$ が成立しません。ここでも，命題論理では，Q' を P' の否定として扱うことができないのです。

前者のような（両方否定されることがあり得る）関係を**反対対等**，逆に後者のような（両方肯定されることがあり得る）関係を**小反対対等**の関係といいます。これは，命題論理の P と $\sim P$ のように**矛盾対等**の関係とは本質的に異なるのです。

これら 3 つの概念は，カントのアンチノミー（純粋理性の二律背反）の問題を理解する際に，極めて重要になります。

補足：数学における量化子

ちなみに，フレーゲが考案した量化子は，本来数学を論理学において基礎づけることが目的でした。そのため，数学においても，論理を明晰にするために，量化子を用いることがあります。

例題 12 p, q が不等式 $p^2 + q^2 \leq 8$ を満たすとき，$(p+q, pq)$ の取りうる領域を，存在記号 $\exists$ を用いて求めてください。

【解答】 求める範囲を D とします。このとき，任意の x, y について，

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in D \\
\iff & \exists p, q \ \ s.t. \ \left\{ p^2 + q^2 \leq 8 \ \wedge \ x = p + q \wedge \ y = pq \right\} \\
\iff & \exists p, q \ \ s.t. \ \left\{ x^2 - 2y \leq 8 \ \wedge \ x = p + q \wedge \ y = pq \right\} \\
\iff & x^2 - 2y \leq 8 \ \wedge \ \left\{ \exists p, q \ \ s.t. \ \ x = p + q \wedge \ y = pq \right\} \\
\iff & x^2 - 2y \leq 8 \ \wedge \ \left\{ \exists t \ \ s.t. \ \ t^2 - xt + y = 0 \right\} \\
\iff & x^2 - 2y \leq 8 \ \wedge \ x^2 - 4y \geq 0
\end{aligned}
$$

であるため，求める領域 D は $x^2 - 2y \leq 8 \ \wedge \ x^2 \geq 4y$ と求められます。

例題 13 ϵ-δ 論法

$$
\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - a| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - b| < \epsilon
$$

に基づいて，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ を示してください。

【解答】 $\delta = \epsilon^2$ とすれば，任意の $\epsilon > 0$ について，

$$0 < |x - 0| < \epsilon^2 \ \rightarrow \ |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

が任意の x で成り立つような $\delta = \epsilon^2$ が存在します。よって $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ です。

2.2.2 日本語文の記号化

基本的な文型

述語論理における日本語文の記号化は，命題論理におけるそれよりも単純ではありません。これについて，まずはもっとも単純な例で確認してみましょう。これは非常に重要なことなので，必ず目を通しておいてください。

例題 14 次の記号を用いて，(1)，(2) の文を記号化してください。

$$Fa : a \text{ は鳥である} \qquad Ga : a \text{ は飛ぶ}$$

(1) すべての鳥は飛ぶ
(2) ある鳥は飛ぶ

【解答】
(1) $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$　　(2) $\exists x\ (Fx \land Gx)$

ここで 2 つの解答の形式が微妙に異なることに注意してください。(1) におけるカッコの中身は $(Fx \rightarrow Gx)$ である一方で，(2) におけるカッコの中身は $(Fx \land Gx)$ になっているのです。なぜ，こう区別して書かなければならないのでしょうか。

その理由は，2 つの文章の特性に由来します。まず，(1) において $\forall x\ (Fx \land Gx)$ と書いてしまうのはまずいことはすぐにわかるでしょう。x に鳥が入ると限定されている状況では $\forall x\ (Fx \land Gx)$ と書いても，まあ問題はないのですが，一般的には x にカエルやのび太君が入ってくる可能性だってあるわけです。すると，このような場合，カエルやのび太君が鳥になって飛んで行ってしまいます。一般に全称文は法則文として機能するものですから，法則が成り立つ範囲をあらかじめ Fx の条件命題によって制限しておく必要があるわけです。

それでも，$\forall x\ (Fx \land Gx)$ と複雑に書くのではなく，シンプルに $\forall x\ Gx$ と書くべきです。

一方で存在文というのは，基本的に対象の存在の在り方を述べたものです。ですから，$\exists x\ (Fx \rightarrow Gx)$ と書いてしまっては，x に鳥以外が入った場合も量化子の中身（$Fx \rightarrow Gx$）が真になってしまうため，我々が言いたい内容と一致しません。それゆえ，ここでは存在を示すのにもっともふさわしい，結合子 $\land$ が用いられるわけです。ただし，変項 x の取り得る議論領域が鳥全体の集合におさまる場合は，単純に $\exists x\ Gx$ でよいわけです [5]。

このように，述語論理では，変項 x の取り得る範囲をきっちり抑えておくことが重要です。本冊子では，このような変項のとりうる議論領域を**ドメイン**といいます。

多重量化を含む場合

次に，多重量化を含む場合についてです。先ほど，議論領域（ドメイン）についての補足もしましたので，そのことも兼ねて，練習してみましょう。なお，今後は誤解の生じない限り，述語をカッコなしで Fxy と書きますが，カッコをつけて $F(xy)$ と書いても構いません。

例題 15 以下の (a)～(i) の記号化は，ドメインが人間全体の集合からなる場合の記号化です。(1)，(2) の問いに答えてください。

$$Fxy : x \text{ は } y \text{ を愛している} \qquad Hx : x \text{ は人間である}$$

(a) $\forall x \forall y Fxy$ (b) $\exists x \exists y Fxy$ (c) $\forall x \exists y Fxy$ (d) $\exists y \forall x Fxy$ (e) $\forall y \exists x Fxy$
(f) $\exists x \forall y Fxy$ (g) $\sim \forall x \exists y Fxy$ (h) $\exists x \sim \exists y Fxy$ (i) $\exists x \forall y \sim Fxy$

(1) (a)～(i) の記号化に対応するもとの日本語を書いてください。
(2) ドメインを人間以外に拡張するとき，(a)～(i) はどのように書き換えられますか。

【解答】
(1)
(a) 人はみな，すべての人を愛している。
(b) 誰か人を愛する人がいる。
(c) 人はみな誰かを愛している。
(d) すべての人から愛される人がいる。
(e) 人はみな，誰かに愛されている。
(f) すべての人を愛する人がいる。
(g) すべての人間が誰かを愛するわけではない。
(h) 人を愛さないような人がいる。
(i) 誰も人を愛さない人がいる。
(2)
(a) $\forall x(Hx \to \forall y(Hy \to Fxy))$
(b) $\exists x(Hx \land \exists y(Hy \land Fxy))$
(c) $\forall x(Hx \to \exists y(Hy \land Fxy))$
(d) $\exists y(Hy \land \forall x(Hx \to Fxy))$
(e) $\forall y(Hy \to \exists x(Hx \land Fxy))$
(f) $\exists x(Hx \land \forall y(Hy \to Fxy))$
(g) $\sim \forall x(Hx \to \exists y(Hy \land Fxy))$
(h) $\exists x(Hx \land \sim \exists y(Hy \land Fxy))$
(i) $\exists x(Hx \to \forall y(Hy \to \sim Fxy))$

2.2.3　議論領域と意味の解釈

それでは，述語論理の意味論に入りましょう。話を進めていくうちに，述語論理の意味論は命題論理の意味論と比べて，貧弱であることがはっきりしてくると思います。

Fa と Fx の違いについて

まずは，論理式 Fa と命題関数 Fx の違いについて，意味論的な観点から確認しておきましょう。

例題 16　「Fa の真偽が未定である」と言われる意味と,「Fx の真偽が未定である」と言われる意味にはどのような区別がありますか [6)]。

【解答】　「Fa の真偽が未定である」と言われる場合，それは単に述語 F，個体 a の意味が未定だからであり，それがちゃんと定まれば，実際の世界の在り方に応じてちゃんと真偽が確定します。一方で Fx はそもそも命題関数ですから，述語 F の意味が定まったところで，真偽は定まりません。

量化を含む文に関する真偽の規定

次に，量化を含む文に関する真偽の規定を，次のように定めます。

定義 3 (量化を含む文に関する真偽の規定)
(1) $\forall x\ Fx$ が真であるとは，議論領域 D に属する任意の定項 a_i に関して Fa_i が真であるときであり，またそのときに限る。
(2) $\exists x\ Fx$ が真であるとは，Fa が真となるような議論領域 D に属する定項 a が存在するときであり，またそのときに限る。

上の定義から分かるように，述語論理における論理式の真理は，基本的にドメイン D の範囲に依存します（これは前節の議論でも確認してきたことです)。

例題 17　「Fa : a は鳥である」とするとき，(1)，(2) のドメインに基づいて，$\forall x\ Fx$ の真偽を判定してください。

(1) D_1 : 鳥全体の集合
(2) D_2 : 動物全体の集合

【解答】
(1) 真　　(2) 偽

2.2.4 妥当式と反証モデル

決定手続き

命題論理と同様に述語論理においても，一般に，与えられた論理式におけるそれぞれの論理記号に意味を与えなくては，その論理式の真偽は確定しません。しかし命題論理の場合には，それぞれの命題記号が真か偽かのいずれかを取ることに注目することで，出てくる命題記号にわざわざ意味づけすることなく，その議論のようすを観察し，さらにはその議論が意味論的に妥当であることを確認することができました。このように，**議論（および論理式）の論理的真理を有限回の機械的操作によって確認する方法を決定手続き**といいます。

ところが，**述語論理の場合には，命題論理における真理値分析のような決定手続きが存在しないことが，証明されてしまっているのです**[7]。ここから，述語論理においてある議論が意味論的妥当性を持つことを確認する方法は，構文論による演繹に頼るしかないことが確認できます。

ただし，いずれ確認するように，単項述語（つまり，変項を1つしか持たないような述語）のみが出てくる論理式に限り，有限回の手続きにより，論理式の妥当性が決定できます。

とはいえ，後に述べるように，反証モデルをいくら探しても全然見つからないこともあるので，やはり厄介であることは変わりません。

しかし逆に言えば，ある議論が意味論的妥当性を持つ**のでないこと**を示すためには，その議論に対する反証モデル $\mathcal{M}$ を1つ提示すればよいことになります。これについて，以下で詳しく見ていきましょう。

妥当式と反証モデル

論理式において，あるドメイン D を与え，かつその論理式に出てくる述語と名前に解釈 I を与えれば，その論理式の真偽は決定できます。そのようなドメイン D と解釈 I の集合を**モデル**といいます。

また，命題論理におけるトートロジーに対応するものとして，以下のように**妥当式**を定義します。

> **定義 4 (妥当式)** ある論理式 A が**妥当**または**妥当式**であるとは，論理式 A がいかなるモデル $\mathcal{M}$ においても真であることであり，またそのときに限る。

これより，ある論理式が妥当式でないことを確認するためには，その論理的真理を打ち砕くような反証モデル $\mathcal{M}$ を具体的に提示してやればよいことになります。ここでネックになってくるのは，**そのような反証モデル $\mathcal{M}$ を具体的に見つけることができるか**，ということです。

ここで，以後の議論をもう少し厳密にするため，モデル $\mathcal{M}$ を厳密に定義しなおしましょう。それは以下のようになります。

定義 5 の示す意味がよく分からないという読者は，ひとまず飛ばして例題 18,19 に進んで構いません。

定義 5 (モデル $\mathcal{M}$) 次の (1)〜(3) の条件を満たす，ドメイン D と解釈 I からなる $\mathcal{M} = (D, I)$ を，議論 A の**モデル**と言う。

(1) ドメイン D は空でない集合である。
(2) 写像 I によって，議論 A に現れる名前 $a, b, \cdots$ それぞれ 1 つずつに，ドメイン D の要素唯 1 つが対応付けられる。
(3) 写像 I によって，議論 A に現れる k 項関数詞 $A, B, \cdots$ に，$D^k \mapsto D$ の写像が対応付けられる。
(4) 写像 I によって，議論 A に現れる k 項述語 $F, G, \cdots$ に，**入力の結果できた命題が真となるような**ドメイン D^k の要素の集合（空集合でもよい）が対応付けられる。

それでは，反証モデルについて，まずは簡単な例から確認してみましょう。

例題 18 $\forall x Fx \wedge \forall x(\sim Fx \wedge Fa)$ が妥当式ではないことを示す反証モデル $\mathcal{M}$ を 1 つ提示してください。

【解答】
反証モデル例 $\mathcal{M}_1$

・ドメイン D : 人間全体の集合
・解釈 I
　　名前 a : のび太くん（ $\in D$）
　　述語 F : 男全体の集合（つまり, Fx は「〜は男である」ということ）

これは表記上の問題ですが，述語 F の解釈を示すときは，F の意味を明らかにするのではなく，Fx **への代入結果が真となるようなドメインの集合によって** F **への解釈を示している**ことに注意してください。このようないささか不自然な述語の意味付けが，今後いかに強力な意味を持つかは，いずれわかるでしょう。

それでは，もっと複雑な例を 1 つ扱ってみましょう。

例題 19 次の議論 A の反証モデルを考えます。

$$\begin{cases} \text{前提}\,\mathbf{1} & \forall x \forall y(Fxy \to F(AxAy)) \\ \text{前提}\,\mathbf{2} & \forall x \forall y \forall z(Fxy \land Fyz \to Fxz) \\ \text{結論} & \exists x F(A(x)x) \end{cases}$$

(1) 次のモデル $\mathcal{M}_1$ に従って，上の議論の前提，結論を具体的に書き換えてください。

モデル $\mathcal{M}_1$

$$\begin{cases} \cdot\ \text{ドメイン}\ D : \mathbb{N}\ (\text{自然数全体の集合}) \\ \cdot\ \text{解釈}\ I \\ \qquad Ax : x \mapsto x+1\ (\text{要は}\ Ax = x+1\ \text{ということ}) \\ \qquad F : \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | x < y\}\ (\text{要は}\ x < y\ \text{ということ}) \end{cases}$$

(2) モデル $\mathcal{M}_1$ が議論 A の反証モデルであることを確認してください。

【解答】

(1)

$$\begin{cases} \text{前提}\,\mathbf{1} & \text{任意の}\ x, y \in \mathbb{N}\ \text{について},\ x < y\ \text{ならば},\ x+1 < y+1 \\ \text{前提}\,\mathbf{2} & \text{任意の自然数}\ x, y, z \in \mathbb{N}\ \text{について},\ x < y\ \text{かつ}\ y < z\ \text{ならば},\ x < z \\ \text{結論} & \text{ある}\ x \in \mathbb{N}\ \text{が存在して},\ x+1 < x \end{cases}$$

(2) (1) の答えをみてみると，前提 1，前提 2 はともに正しいものの，結論は明らかに間違っています。つまり，モデル $\mathcal{M}_1$ では，前提はすべて真ですが，結論は偽です。以上から，モデル $\mathcal{M}_1$ は議論 A の反証モデルです。

反証モデルを見つけることの困難性

ここで厄介なのは，ある論理式 A が意味論的妥当性を持たないことを示すときに，いつまで経っても反証モデルが見つからない可能性があることです。特に，**論理式 A において，それの反証となる有限モデルが存在しないとき，反証モデルを示すのはきわめて厄介になります**。というのも，無限個のドメインを常に持ってきてモデルを提示せねばならず，そのようなモデルは無限にあり得るからです。

有限集合のドメインを持つモデルを**有限モデル**，無限集合のドメインを持つモデルを**無限モデル**といいます。

しかし，単項述語論理の場合に限り，議論（あるいは論理式）が意味論的に妥当でない場合，その議論（あるいは論理式）の有限の反証モデルが存在することが示されています。

変項 x を 2 つ以上持つ述語を含まない議論および論理式を単項述語論理といいます。

それについて触れる前に，単項述語論理の反証モデルのようすを，具体例で確認してみましょう。

例題 20 議論 A

$$\forall x(Fx \to Gx),\ Ga,\ \exists x(Fx \land Gx) \qquad \therefore\ Fa$$

において，以下のモデルが議論 A の反証モデルかどうか確認してください。

モデル $\mathcal{M}_1$

$$\begin{cases} \cdot\ \text{ドメイン}\ D : \{0,1\} \\ \cdot\ \text{解釈}\ I \\ \qquad \text{定項}\ a : 0 \\ \qquad \text{述語}\ F : \{0\} \\ \qquad \text{述語}\ G : \{0\} \end{cases}$$

【解答】 モデル $\mathcal{M}_1$ において，前提 $\forall x(Fx \to Gx)$ は

$$(F0 \to G0) \land (F1 \to G1)$$

と展開でき，これは真です。同様にして，Ga は真，$\exists x(Fx \land Gx)$ は

$$(F0 \land G0) \lor (F1 \land G1)$$

と展開でき，これも真です。また，結論 Fa も真です。以上から，モデル $\mathcal{M}_1$ は議論 A の反証モデルではありません。

ここから推測がつくのは，単項述語論理の議論においては，ドメインの要素をいくつかの有限数に絞って，述語 $F, G, \cdots$ と各ドメインの要素のすべての組み合わせの真偽を調べつくせば，有限回の手続きにより意味論的な妥当性が決定できるのではないか，ということです。これについてもう少し考えてみましょう。

単項述語論理においては意味論的妥当性が決定できることについて

例題 20 では，2 つの述語 F, G が出てきています。このとき，ドメイン D から任意の要素 x を拾ってきて 2 つの命題 Fx, Gx を作ったとき，(Fx, Gx) の真偽の組み合わせとしてあり得るのは，(真, 真), (真, 偽), (偽, 真), (偽, 偽) の高々4 通りのどれかです。

これより，この 4 通りの組み合わせをすべて網羅するためには，ドメインの要素はたった 4 つ（a, b, c, d）で十分であることがわかります。以上より，これら 4 つの名前 a, b, c, d を要素とするドメイン $D_1 = \{a, b, c, d\}$ と，これらの要素 a, b, c, d に対してそれぞれ (真, 真), (真, 偽), (偽, 真), (偽, 偽) を出力する述語 F, G を定めた解釈 I_1 を作り，それらをまとめたモデル $\mathcal{M}_1 = (D_1, I_1)$ を考えることにより，意味論的な妥当性が決定できそうです。

ただ，上の議論は述語が 2 つしかないときであり，またさらに言えば論理式に定項 a がない場合です。以下の定理は，以上の議論の拡張とみることができます。

> **定理 1**　k 個の単項述語が出てくる単項述語論理における議論 A において，ある議論の反証モデル $\mathcal{M}$ が存在するとき，その議論が反証される，高々2^k 個の要素からなるドメイン D_1 をもつ有限モデル $\mathcal{M}_1$ が存在する [8)]。

（証明は略。）さらに，先ほどの議論と合わせて一般化すれば，以下の強力な定理が成立します。

> **定理 2**　単項述語論理の議論において，意味論的な妥当性は決定手続き可能である。

2.2.5 演習問題

演習問題 9 z を複素数，$f(z)$ を複素関数とするとき，$\lim_{z \to z_0} f(z) = w$ ならば，極限値 w は唯 1 つしか存在しないことを，ϵ-δ 論法を用いて示してください。

【ヒント】複素数全体に拡張された ϵ-δ 論法の形は，実数とまったく同じです。ここで，2 つの極限 w_1, w_2 があったとすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在して，

$$
\begin{aligned}
0 < |z - z_0| < \delta_1 \ &\rightarrow\ |f(z) - w_1| < k_1\epsilon \\
0 < |z - z_0| < \delta_2 \ &\rightarrow\ |f(z) - w_2| < k_2\epsilon
\end{aligned}
$$

とかけます。ここから $w_1 = w_2$ を示します。

演習問題 10 議論 A

$$\forall x(\forall y Gy \rightarrow Fx) \qquad \therefore\ \exists y(\exists x Gx \rightarrow Fy)$$

において，以下のモデルが議論 A の反証モデルかどうか確認してください。
モデル $\mathcal{M}_1$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{・ドメイン } D : \{0, 1\} \\
\text{・解釈 } I \\
\qquad \text{述語 } F : \phi \text{（空集合）} \\
\qquad \text{述語 } G : \{0\}
\end{array}
\right.
$$

演習問題 11 (ラッセルのパラドックス)
$\omega(x)$ を次のように定めます。

$\omega(x)$:「x は自分自身を述語づけることができないような述語である」

(1) 「$Fx : x$ は日本語である」,「$Gx : x$ は神経質である」とするとき，$\omega(F), \omega(G)$ の真偽を判定してください。
(2) $\omega(x) \leftrightarrow \sim x(x)$ を確認してください。
(3) (2) の式の x に ω 自身を代入すると，$\omega(\omega) \leftrightarrow \sim \omega(\omega)$ というおかしなことが起こってしまいます（**ラッセルのパラドックス**）。これに対して，ウィトゲンシュタインは以下のようにしてラッセルのパラドックスを解決しようとしました。ウィトゲンシュタインの伝えたかったことを分かりやすく説明してください。

3.33 論理的構文論においては，断じて記号の意味が役割を果たすようなことがあってはならない。論理的構文論は記号の意味を論じることなく立てなければならず，そこではただ諸表現を記述することだけが前提にされうる。
3.331 ……ラッセルの誤りは，記号の規則を立てるのに記号の意味を論じなければならなかった点に示されている。
3.332 いかなる命題も自分自身について語る事はできない。……
3.333 関数自身をその命題の入力項にすることはできない。なぜなら，関数記号はすでに入力項の原型を含んでおり，そしてその原型には自分自身は含まれえないからである。
そこで,〔関数 fx を変項とする〕関数 $F(fx)$ が自分自身の入力項になりえたと仮定してみよう。そのとき，$F(F(fx))$ という命題が存在することになる。ところがこの命題において外側の関数 F と内側の関数 F は異なる意味を持っているのでなけばならない。というのも，内側は $\phi(fx)$ という形式であるのに対し，外側は $\psi(\phi(fx))$ となるからである。2 つの関数に共通なものは文字 F にすぎない。だが文字はそれ自体では何も表さない。
このことは，$F(Fa)$ の代わりに $\exists\phi\ F(\phi a) \land \phi a = Fa$ と書くと，ただちに明らかになる。
かくして，ラッセルのパラドックスは片付く。

ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』

2.3 述語論理の構文論

述語論理の構文論においてやることは，基本的に命題論理のそれとほとんど同じです。それゆえ，第 1 章で導入した 10(+1) 個の推論規則は，これからも使い続けます。これらに加えて，新たに 3 つの推論規則を増やさせてください。

2.3.1 推論規則の新導入

1. UI : Universal Instantiation

$\dfrac{\forall\alpha\phi\alpha}{\phi a}$ $\dfrac{\forall\alpha\phi\alpha}{\phi x}$

前提 $\forall\alpha\phi\alpha$ から，ϕa を導出してよい。
前提 $\forall\alpha\phi\alpha$ から，ϕx を導出してよい。

2. EG : Existential Generalization

$\dfrac{\phi a}{\exists\alpha\phi\alpha}$ $\dfrac{\phi x}{\forall\alpha\phi\alpha}$

前提 ϕa から，$\exists\alpha\phi\alpha$ を導出してよい。
前提 ϕx から，$\exists\alpha\phi\alpha$ を導出してよい。

3. EI : Existential Instantiation

$\dfrac{\exists\alpha\phi\alpha}{\phi\beta}$

前提 $\exists\alpha\phi\alpha$ から，$\phi\beta$ を導出してよい。（ただし，β は演繹で今まで一度も出てきていない未確定項でなくてはならない。）

もちろん，命題論理のときと同様，以上で示した推論規則は，$\phi x, \psi x$ が込み入った述語の場合（たとえば $\sim Fx \wedge Gc \to Hx$ など）であっても適用できます。

ここで推論規則 EI において出てきた「未確定項」について説明します。ようは，何かしら存在してるんだから，それを具体的に記号化してもいいよね，というわけなのですが，その記号（上でいう β）の指す具体的な名前はまったく分からないわけです。つまり，ここで出てくる β は，ある不確定な名前を指しながらも，それが何なのか分からないという，ある種定項と変項の間にいるような存在です。本冊子ではこのような項を**不確定項**といいます。不確定項に，名前や，以前使った文字を使うのがまずいことは，すぐにわかるでしょう。

例題 21 記号式 $\exists x(Fx \wedge Gy)$ から，推論規則 EI を用いて正しく導けるものはどれですか。ただし，a はこれまでに出てきた定項，z は（まだ使われていない）変項とします。
(a) F たかし $\wedge Gy$ (b) $Fy \wedge Gy$ (c) $Fa \wedge Gy$ (d) $Fz \wedge Gy$

【解答】 (d) のみ

2.3.2 演繹の形式の新導入

まだ混乱している人がいるかもしれませんが，先へ進みます。上の推論規則の導入において，なぜ変項 x がでてきているのだろう？と思った方がいるかもしれませんが，それは次の推論規則，**UD（Universal Derivation）**において利用するためです。

UD（Universal Derivation）

ざっくりいえば，x の制限なしに Fx が正しいとわかったとき，$\forall x\ Fx$ を正しいと認めることです。以下で具体例を確認したほうがわかりやすいでしょう。

例題 22 次の推論の演繹を構成してください。

$$\forall x(Fx \vee Hx \to Gx) \qquad \therefore\ \forall x(Fx \to Gx)$$

【解答】 演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$\forall x(Fx \to Gx)$	
2		$\forall x(Fx \vee Hx \to Gx)$	Pr
3	~~Show~~	$Fx \to Gx$	
4		Fx	Ass CD
5		$Fx \vee Hx$	4 Add
6		$Fx \vee Hx \to Gx$	2 UI
7		Gx	5,6 MP
		7, CD	
		3 UD	

ここで注意してほしいのは，UD の演繹，すなわち 3 行目において用いている変項 x は，それ以前の行において自由変項（および定項）として一切出てきていない文字を使わなければなりません。具体的にいえば，演繹 UD において用いられる変項を α とすれば，$\forall\alpha\phi\alpha$, $\exists\alpha\phi\alpha$ が演繹 UD 以前にいくらあっても構いませんが，単独の $F\alpha$ とかが演繹 UD 以前に 1 個でもあるとアウトです。

なお，演繹 UD において新たに出てくる x は，量化子によって束縛されていない変項であり，自由変項といいます。一方で，$\forall xFx$ のように量化子によって束縛されている x を束縛変項といいます。

演繹形式 UD の使用における重要な注意点を，以下の具体例で確認しておきましょう。

例題 23 次の推論の演繹を構成してください。

$$\exists xFx \to \forall xGx,\ \forall x(Gx \vee Hx) \to \forall xJx \qquad \therefore\ \forall x(Fx \to Jx)$$

【解答】 演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$\forall x(Fx \to Jx)$	
2		$\exists xFx \to \forall xGx$	Pr
3		$\forall x\ Gx \to Hx\ \ \to \forall xJx$	Pr
4	~~Show~~	$Fx \to Jx$	
5		Fx	Ass CD
6		$\exists xFx$	5 EG
7		$\forall xGx$	2,6 MP
8	~~Show~~	$\forall x(Gx \vee Hx)$	
9		$\sim \forall x(Gx \vee Hx)$	Ass ID
10		$\exists x \sim (Gx \vee Hx)$	9 QN
11		$\sim (G\alpha \vee H\alpha)$	10EI
12		$G\alpha$	7 UI
13		$G\alpha \vee H\alpha$	12 Add
		11,13 ID	
14		$\forall xJx$	3,8 MP
15		Jx	14 UI
		15 CD	
		4 UD	

推論規則 QN については，次頁をみてください。

ここで重要なのは，**8〜13 行目の推論において，x を自由変項とした UD を利用できない**ということです。というのも，5 行目で Fx が登場してしまっており，自由変項 x の文字が既に用いられてしまっているからです。

しかし，なぜ我々はこのような場面において，UD を利用できないのでしょうか。――演繹形式 UD における重要な点は，**x の制限なしに** Fx が正しいことを示せれば，$\forall xFx$ を示してよいことにあります。そのため，演繹 UD を導入する際に，**項 x が完全な任意性を持っていなくては**，いくら Fx を示しても，$\forall xFx$ を結論付けることはできません。そのため，既に定項または自由変項として用いられている文字を演繹 UD に用いてはならず,「限定なしの項」を用いなければならないのです。

2.3.3 Quantifer Negation

有名な規則なのでご存知の方も多いと思いますが，次のような規則があります。

$$\sim \forall x Fx \leftrightarrow \exists x \sim Fx$$

$$\sim \exists x Fx \leftrightarrow \forall x \sim Fx$$

これを QN(Quantifer Negation) といいます。これを証明しておきましょう。これは，上下の論理式どちらかを証明すれば，もう反対側は推論規則 MT によりすぐに証明できるのですが，どうやら下側の論理式の方が圧倒的に証明しやすいように思われるので，そちらの証明を示しておきます [9]。

例題 24 次の推論の演繹を構成してください。

$$\sim \exists x Fx \leftrightarrow \forall x \sim Fx$$

【解答】 演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$\sim \exists x Fx \leftrightarrow \forall x \sim Fx$	
2	~~Show~~	$\sim \exists x Fx \rightarrow \forall x \sim Fx$	
3		$\sim \exists x Fx$	Ass CD
4	~~Show~~	$\forall x \sim Fx$	
5	~~Show~~	$\sim Fx$	
6		Fx	Ass ID
7		$\exists x Fx$	4 EG
8		$\sim \exists x Fx$	3 R
		7,8 ID	
		5 UD	
		4 CD	
9	~~Show~~	$\forall x \sim Fx \rightarrow \sim \exists x Fx$	
10		$\forall x \sim Fx$	Ass CD
11	~~Show~~	$\sim \exists x Fx$	
12		$\exists x Fx$	Ass ID
13		$F\alpha$	12 EI
14		$\sim F\alpha$	10 UI
		13,14 ID	
		11 CD	
15		$\sim \exists x Fx \leftrightarrow \forall x \sim Fx$	2,9 CB
		15 DD	

2.3.4 演繹の練習

それでは，演繹の演習に入りましょう。**以下では，QN は推論規則として認めてしまって構いません。**また，述語論理における新たなヒントを，命題論理に続けて以下に載せておきます。

ヒント 4 $\exists xFx$ を示すときは，背理法で $\sim \exists xFx$ を仮定したあと，QN を用います。

ヒント 5 $\forall xFx$ を示すときは，UD を用います。ただし，UD を利用できないときは，背理法で $\sim \forall xFx$ を仮定したあと，QN を用います。

ヒント 6 EI と UI が同時に利用できるときは，EI を先に使用し，UI を後に使用します。

例題 25 次の推論の演繹を構成してください。ただし，$A(xyz)$ は 3 項関数詞，$B(x)$ は単項関数詞，c は定項（0 項関数詞）です。

$$\forall x \forall y FA(xB(y)c) \qquad \therefore\ \exists xFA(B(x)xc)$$

【解答】 演繹は以下のようになります。

1	~~Show~~	$\exists xFA(B(x)xc)$	
2		$\sim \exists xFA(B(x)xc)$	Ass ID
3		$\forall x \forall y FA(xB(y)c)$	Pr
4		$\forall x \sim FA(B(x)xc)$	2 QN
5		$\forall y FA(B(B(x))B(y)c)$	3 UI
6		$FA(B(B(x))B(x)c)$	5 UI
7		$\sim FA(B(B(x))B(x)c)$	4 UI
		6,7 ID	

さいごに，1 つ補足的な注意をしておきましょう。$\forall xFx$ や $\exists xFx$ に出てくる束縛変項 x は，実際はさまざまな定項が代入済みのような形になっているのであり，それゆえ，実質的には束縛変項 x はもはや変項ではありません。これは，$\forall xFx$ や $\exists xFx$ がもはや命題関数ではないことを考えれば，明らかでしょう [10)]。

東工大 2017 年度科学哲学 B の講義資料において $a, b, \cdots$ も変項と呼ばれているのは，このような理由と思われます。

一方で，（意味論ではなく）構文論における定項 a は基本的に意味が与えられていないために，実質的には自由変項とみなしても構いません。そのため，述語論理の構文論においては，定項 $a, b, \cdots$ と自由変項 $x, y, \cdots$ は本質的に区別する必要がありません [11)]。

2.3.5 演習問題

演習問題 12 「すべての鳥と飛行機は飛ぶ」という日本語は，論理的にあいまいです。なぜなら，この文章は,「すべての鳥は飛ぶ，かつすべての飛行機は飛ぶ」とも読めるし,「すべての〈鳥または飛行機〉は飛ぶ」とも読めるために，2 つの解釈があり得るからです。

ここで，

$$Fx : x \text{ は鳥である} \qquad Hx : x \text{ は飛行機である} \qquad Gx : x \text{ は飛ぶ}$$

とします。

(1) 「すべての鳥は飛ぶ，かつすべての飛行機は飛ぶ」を記号化してください。

(2) 「すべての〈鳥または飛行機〉は飛ぶ」を記号化してください。

(3) 以下の 2 つの推論規則を示し，2 つの文章が論理的に同値であることを確かめてください。

$$\forall x(Fx \lor Hx \to Gx) \to \forall x(Fx \to Gx) \land \forall x(Hx \to Gx)$$
$$\forall x(Fx \to Gx) \land \forall x(Hx \to Gx) \to \forall x(Fx \lor Hx \to Gx)$$

演習問題 13 次の推論の演繹を構成してください。

1. $\forall x(Fx \to Gx),\ \forall xFx \qquad \therefore \forall xGx$
2. $\forall x(Fx \to Ga) \qquad \therefore \exists xFx \to Ga$
3. $\exists x(Fx \land Gx) \qquad \therefore \exists xFx \land \exists xGx$
4. $\forall xFx \lor \forall xGx \qquad \therefore \forall x(Fx \lor Gx)$
5. $\exists xFx \lor \exists xGx \qquad \therefore \exists x(Fx \lor Gx)$
6. $(\forall x(Fx \to \forall y(Gy \to Hxy)) \land \exists x(Fx \land \forall y(Iy \to \sim Hxy))) \to \forall x(Ix \to \sim Gx)$

演習問題 14 次の推論の演繹を構成してください。

1. $\forall xFx \lor \forall xGx,\ \forall x(Fx \to \sim Gx) \qquad \therefore \exists xFx \to \forall xFx$
2. $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx \lor Hx),\ \exists xGx,\ \forall x(Fx \to \forall xHx) \qquad \therefore \forall xFx$
3. $\forall x(Fx \to Gx \lor Hx),\ \forall x(Gx \lor Hx \to Kx),\ \sim \exists x(Kx \land Gx),\ \sim \exists xFx \to \exists xGx \qquad \therefore \exists x(Fx \land Hx)$

脚注

[1] 分析哲学における自然言語の捉え方と，フレーゲに始まる述語論理の関係性については，飯田隆『言語哲学大全 I』1.3 節を参照してください。
[2] 本冊子で採用した構文論と意味論が整合性を保っている点については，`https://researchmap.jp/?action=cv_download_main&upload_id=152615` を参照してください。
[3] 野谷茂樹『論理学』85 頁より。
[4] 野谷茂樹『論理学』82 頁
[5] この内容は，野谷茂樹『論理学』P92〜93 を参考に，著者（島村）が敷衍したものです。
[6] 野谷茂樹『論理学』100 頁より。
[7] 野谷茂樹『論理学』105 頁
[8]2018 年科学哲学 B，講義資料 49 頁
[9] 上側の論理式の証明がうまくいった人は，島村に教えてください
[10] 野谷茂樹『論理学』96 頁より
[11] 野谷茂樹『論理学』109 頁より

更新履歴

Ver.1.0　2018 年 9 月完成。第 1 章（命題論理），第 2 章（述語論理）まで。

Ver.1.01　2020 年 5 月。微小な修正。